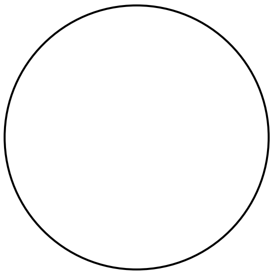
Définition matérielle de la bande de Moebius

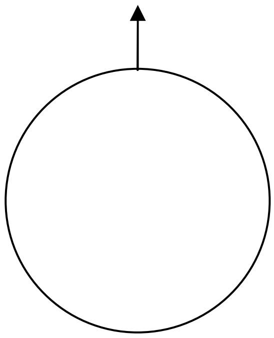
« Un *ruban de Möbius* est une surface obtenue en cousant bord à bord deux extrémités d'un ruban rectangulaire avec une torsion d'un demi-tour»

En fait, si on reprend cette 2ème définition de manière précise :

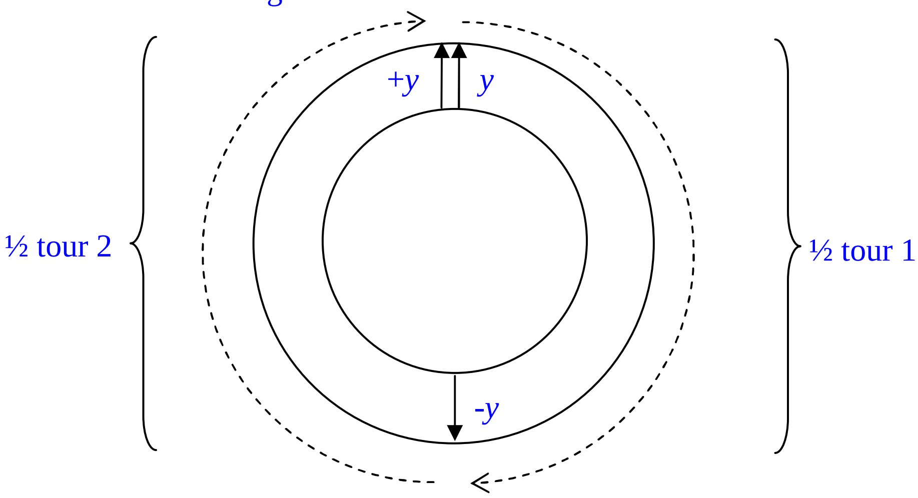
Soit un cercle :



Et un segment de longueur constante :

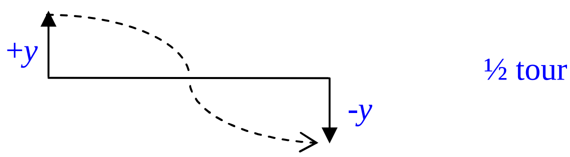


Que l'on fait tourner régulièrement autour :

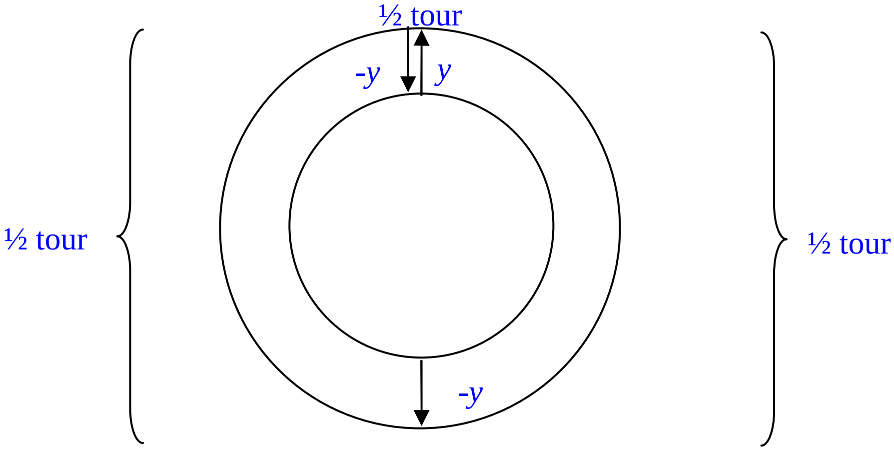


On n'obtient pas une bande de Moebius, mais une couronne. Ce faisant, on a fait faire au segment orienté une rotation de 2 π (360°), soit : deux demi-tours.

Si l'on fait effectuer une rotation d'un demi-tour à un segment orienté, de manière linéaire, on n'obtient pas non plus une bande de Moebius :

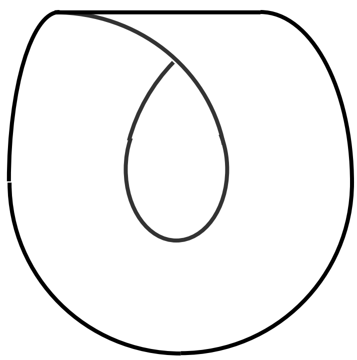


Par contre, si on combine les deux mouvements, ce qui est la définition : On obtient un ruban de Möbius en faisant tourner régulièrement un segment de longueur constante autour d'un cercle avec une rotation d'un demi-tour

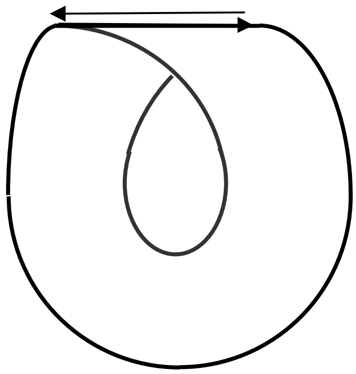


Le segment a bien effectué trois demi-tours. Le dessin ci-dessus est donc bien une représentation de la bande de Moebius, et elle a trois torsions, au sens de ce que j'appelle en effet torsion : changement de sens d'une dimension, de *y* à – *y*. le segment est passé de y à –*y*, puis de -*y* à *y* afin d'effectuer la rotation, à quoi il a fallu ajouter une torsion supplémentaire afin d'obtenir l'opposition requise (*y*, -*y*) à l'arrivée. Tout se passe dans le plan, à base de rotations que j'appelle ½ tours. Là, c'est une question de vocabulaire, mais je viens de montrer qu'il n'y a pas de différence entre les deux premiers ½ tours et le troisième. Dans les trois cas, il s'agit d'une rotation de π. Dans les trois cas, la rotation d'accompagne d'un déplacement linéaire, de haut en bas (y→ -y), puis de bas en haut, (-y→ y), et enfin de gauche à droite (y→ -y).

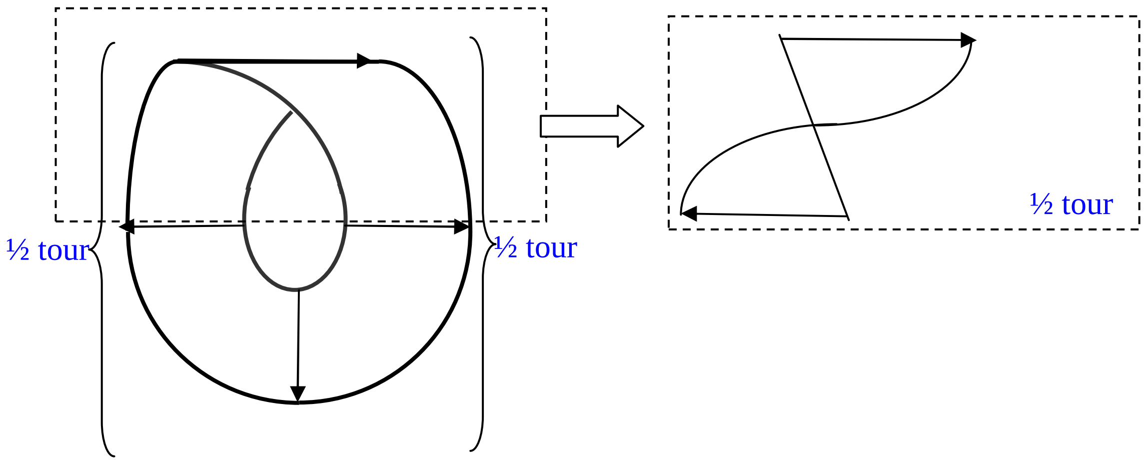
Le dessin canonique de la bande de Moebius :



…en tient compte, si on l'analyse bien : le trait rectiligne supérieur qui désigne le changement de face, soit la torsion, inscrit la fusion des deux vecteurs de sens contraire :



Si le vecteur avait parcouru le bord de la bande sans subir de torsions il se serait retrouvé de même sens :



Rotation de deux ½ tours
(2 π)

Inversion par déplacement linéaire
de ½ tour supplémentaire (π)

La question qui se pose alors devient celle de la troisième dimension.